O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

Elon Lages Lima

♦ Nível Avançado.

INTRODUÇÃO

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais.

Apresentamos abaixo uma breve exposição sobre os números naturais, onde o Princípio da Indução se insere adequadamente e mostra sua força teórica antes de ser utilizado na lista de exercícios propostos ao final.

1. A SEQÜÊNCIA DOS NÚMEROS NATURAIS

Os números naturais constituem um modelo matemático, uma escala padrão, que nos permite a operação de contagem. A seqüência desses números é uma livre e antiga criação do espírito humano. Comparar conjuntos de objetos com essa escala abstrata ideal é o processo que torna mais precisa a noção de quantidade; esse processo (a contagem) pressupõe portanto o conhecimento da seqüência numérica. Sabemos que os números naturais são 1, 2, 3, 4, 5,… A totalidade desses números constitui um conjunto, que indicaremos com o símbolo $\mathbb{N}$ e que chamaremos de conjunto dos naturais. Portanto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5,\dots\}$.

Evidentemente, o que acabamos de dizer só faz sentido quando já se sabe o que é um número natural. Façamos de conta que esse conceito nos é desconhecido e procuremos investigar o que há de essencial na seqüência 1, 2, 3, 4, 5… .

Deve-se a ***Giussepe Peano*** *(1858-1932)* a constatação de que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os *axiomas de Peano*. Noutras palavras, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais possui quatro propriedades fundamentais, das quais resultam, como conseqüências lógicas, todas as afirmações verdadeiras que se podem fazer sobre esses números.

Começaremos com o enunciado e a apreciação do significado dessas quatro proposições fundamentais a respeito dos números naturais.

2. OS AXIOMAS DE PEANO

Um matemático profissional, em sua linguagem direta e objetiva, diria que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelas seguintes propriedades:

A. Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n.

B. A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.

C. Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

D. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{N}$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.

Observe que, como estamos chamando de $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, a notação $n \in \mathbb{N}$ significa que n é um número natural.

As afirmações **A**, **B**, **C** e **D** são os *axiomas de Peano*. A notação $s(n)$ é provisória. Depois de definirmos adição, escreveremos $n + 1$ em vez de $s(n)$.

Como concessão à fraqueza humana, nosso matemático nos faria a gentileza de reformular os *axiomas de Peano* em linguagem corrente, livre de notação matemática. E nos diria então que as afirmações acima significam exatamente o mesmo que estas outras:

A'. Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.

B'. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)

C'. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".

D'. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

A partir daí, retomamos a palavra para dizer que o sucessor de 1 chama-se "dois", o sucessor de dois chama-se "três", etc. Nossa civilização progrediu ao ponto em que temos um sistema de numeração, o qual nos permite representar, mediante o uso apropriado dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, todos os números naturais. Além disso, nossa linguagem também fornece nomes para os primeiros termos da seqüência dos números naturais. (Números muito grandes não têm nomes específicos, ao contrário dos menores como "mil novecentos e noventa e oito". Quem sabe, por exemplo, o nome do número de átomos do universo?)

Voltando a usar a notação $s(n)$ para o sucessor do número natural n, teremos então $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$, $5 = s(4)$, etc. Assim, por exemplo, a igualdade $2 = s(1)$ significa apenas que estamos usando o símbolo 2 para representar o sucessor de 1. A seqüência dos números naturais pode ser indicada assim:

$$1 \xrightarrow{\ s\ } 2 \xrightarrow{\ s\ } 3 \xrightarrow{\ s\ } 4 \xrightarrow{\ s\ } 5 \xrightarrow{\ s\ } \cdots$$

As flechas ligam cada número ao seu sucessor.

Nenhuma flecha aponta para 1, pois este número não é sucessor de nenhum outro. O diagrama acima diz muito sobre a estrutura do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

3. O AXIOMA DA INDUÇÃO

Um dos *axiomas de Peano*, o último, possui claramente uma natureza mais elaborada do que os demais. Ele é conhecido como o axioma da indução. Faremos dele uma análise detida, acompanhada de comentários.

O significado informal do axioma **D** é que todo número natural pode ser obtido a partir de 1 por meio de repetidas aplicações da operação de tomar o sucessor. Assim, por exemplo, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor do sucessor de 1, etc. Para se entender melhor o axioma da indução é util examinar o exemplo, no qual $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ mas a função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é modificada, pondo-se $s(n) = n + 2$. Então, se começarmos com 1 e a este número aplicarmos repetidamente a operação de tomar o "sucessor" (nesta nova acepção) obteremos $s(1) = 3$, $s(3) = 5$, $s(5) = 7$, etc., e nunca chegaremos a qualquer número par. Portanto, o diagrama

$$1 \xrightarrow{\ s\ } 3 \xrightarrow{\ s\ } 5 \xrightarrow{\ s\ } \cdots \quad 2 \xrightarrow{\ s\ } 4 \xrightarrow{\ s\ } 6 \xrightarrow{\ s\ } \cdots$$

exibe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ para a qual não é verdade que todo número natural n pode ser obtido, a partir de 1, mediante repetidas aplicações da operação de passar de k para $s(k)$.

Dentro de um ponto de vista estritamente matemático, podemos reformular o axioma da indução do seguinte modo: Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se *indutivo* quando $s(X) \subset X$, ou seja, quando $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, ou ainda, quando o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X.
Dito isto, o axioma da indução afirma que o único subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$ que contém o número 1 é o proprio $\mathbb{N}$.

No exemplo acima, os números ímpares 1, 3, 5, … formam um conjunto indutivo que contém o elemento 1 mas não é igual a $\mathbb{N}$.

O papel fundamental do axioma da indução na teoria dos números naturais e, mais geralmente, em toda a Matemática, resulta do fato de que ele pode ser visto como um método de demonstração, chamado o *Método de Indução Matemática*, ou *Princípio da Indução Finita*, ou *Princípio da Indução*, conforme explicaremos agora.

Seja P uma propriedade que se refere a números naturais. Um dado número natural pode gozar ou não da propriedade P.

Por exemplo, seja P a propriedade de um número natural n ser sucessor de outro número natural. Então 1 não goza da propriedade P, mas todos os demais números gozam de P.

O Princípio da Indução diz o seguinte:

Princípio da Indução: Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 goza de P e se, além disso, o fato de o número natural n gozar de P implica que seu sucessor $s(n)$ também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade P.

Para ver que o Princípio da Indução é verdadeiro (uma vez admitidos os *axiomas de Peano*) basta observar que, dada a propriedade P cumprindo as condições estipuladas no enunciado do Princípio, o conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P contém o número 1 e é indutivo. Logo $X = \mathbb{N}$, isto é, todo número natural goza da propriedade P. As propriedades básicas dos números naturais são demonstradas por indução. Comecemos com um exemplo bem simples.

Exemplo 1. Entre os *axiomas de Peano* não consta explicitamente a afirmação de que todo número é diferente do seu sucessor, a qual provaremos agora. Seja P esta propriedade. Mais precisamente, dado o número natural n, escrevamos $P(n)$ para significar, abreviadamente, a afirmação $n \neq s(n)$. Então $P(1)$ é verdadeira, pois $1 \neq s(1)$, já que 1 não é sucessor de número algum; em particular, 1 não é sucessor de si próprio. Além disso, se supusermos $P(n)$ verdadeira, isto é, se admitimos que
$n \neq s(n)$, então $s(n) \neq s(s(n))$, pois a função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva. Mas a afirmação $s(n) \neq s(s(n)$ significa que $P(s(n))$ é verdadeira. Assim, a verdade de $P(n)$ acarreta a verdade de $P(s(n))$. Pelo Princípio da Indução, todos os números naturais gozam da propriedade P, ou seja, são diferentes de seus sucessores.

Nas demonstrações por indução, a hipótese de que a propriedade P é válida para o número natural n (da qual deve decorrer que P vale também para $s(n)$) chama-se hipótese de indução.

O Princípio da Indução não é utilizado somente como método de demonstração. Ele serve também para definir funções $f\colon \mathbb{N} \to Y$ que têm como dominio o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Para se definir uma função $f : X \to Y$ exige-se em geral que seja dada uma regra bem determinada, a qual mostre como se deve associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$.

Entretanto, no caso particular em que o domínio da função é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, a fim de definir uma função $f : \mathbb{N} \to Y$ não é necessário dizer, de uma só vez, qual é a receita que dá o valor $f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta que se tenha conhecimento dos seguintes dados:

(1) O valor $f(1)$;

(2) Uma regra que permita calcular $f(s(n))$ quando se conhece $f(n)$.

Esses dois dados permitem que se conheça $f(n)$ para todo número natural n. (Diz-se então que a função f foi definida por recorrência.) Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais se pode determinar $f(n)$, o dado (1) acima diz que $1 \in X$ e o dado (2) assegura que $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$. Logo, pelo axioma da indução, tem-se $X = \mathbb{N}$.

Obs. : Uma função $f : \mathbb{N} \to Y$ cujo domínio é o conjunto dos números naturais chama-se uma *seqüência* ou *sucessão* de elementos de Y. A notação usada para uma tal seqüência é $(y_1, y_2,\ldots,y_n,\ldots)$, onde se usa y_n em vez de $f(n)$ para indicar o valor da função f no número n. O elemento y_n .

4. ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

A adição e a multiplicação de números naturais são exemplos de funções definidas por recorrência.

Para definir a adição, fixaremos um número natural arbitrário k e definiremos a soma $k + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fixado k, a correspondência $n \to k + n$ será uma função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = k + n$, chamada "somar k". Ela se define por recorrência, a partir dos seguintes dados:

(S1) $k + 1 = s(k)$

(S2) $k + s(n) = s(k + n)$.

Portanto, $k + 1$ é, por definição, o sucessor de k. E, se conhecermos $k + n$, saberemos o valor de $k + s(n)$: por definição, tem-se $k + s(n) = s(k + n)$. Isto nos permite conhecer $k + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (e todo $k \in \mathbb{N}$).

Usando as notações definitivas $n + 1$ em vez de $s(n)$ e $(k + n) + 1$ em vez de $s(k + n)$, a igualdade (S2) se escreve assim:

(S2') $k + (n + 1) = (k + n) +1$.

Assim, as igualdades (S1) e (S2) ou, equivalentemente, (S1) e (S2') definem por recorrência a soma $k + n$ de dois números naturais quaisquer k e n.

A multiplicação de números naturais se define de modo análogo à adição. Fixado arbitrariamente um número natural k, a multiplicação por k associa a todo número mnatural n o produto $n \cdot k$, definido por indução da seguinte maneira:

(P1) $1\cdot k = k$.

(P2) $(n + 1)\, k = n\cdot k + k$.

O produto $n\cdot k$ escreve-se também nk e lê-se "n vezes k". A definição acima diz portanto que uma vez k é igual a k e $n + 1$ vezes k é igual a n vezes k mais (uma vez) k . Assim, por definição, $2 \cdot k = k + k$, $3 \cdot k = k + k + k$, etc.

Usa-se indução para provar as propriedades básicas da adição e da multiplicação de números naturais. Entre elas, destacam-se as seguintes, válidas para quaisquer $k, n, p \in \mathbb{N}$:

Associatividade: $k + (n + p) = (k + n) + p$ e $k \cdot (n \cdot p) = (k \cdot n)\cdot p$

Comutatividade: $k + n = n + k$ e $k \cdot n = n \cdot k$

Lei do Corte: $k + n = k + p \Rightarrow n = p$ e $k \cdot n = k \cdot p \Rightarrow n = p$

Distributividade: $k\,(n + p) = k \cdot n + k \cdot p$.

Omitiremos as demonstrações destes fatos. O leitor pode considerá-las como exercícios sobre o método da indução.

5. ORDEM

A adição de números naturais permite introduzir uma relação de ordem em $\mathbb{N}$. Dados os números naturais m, n diremos que m é menor do que n, e escreveremos $m < n$, para significar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, diz-se também que n é maior do que m e escreve-se $n > m$ para exprimir que se tem $m < n$. A notação $m \leq n$ significa que $m < n$ ou $m = n$. Por definição, tem-se portanto $m < m + p$ para quaisquer $m, p \in \mathbb{N}$. Em particular, $m < m + 1$. Segue-se também da definição que $1 < n$ para todo número natural $n \neq 1$.

Com efeito, pelo axioma ***C***, $n \neq 1$ implica que n é sucessor de algum número natural m, ou seja, $n = m + 1 = 1 + m$, logo $n > 1$. Assim, 1 é o menor dos números naturais.

Provaremos a seguir as propriedades básicas da relação de ordem $m < n$ que definimos. A primeira delas é a transitividade.

Teorema 1. (*Transitividade.*) Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

Demonstração: Se $m < n$, $n < p$ então $n = m + k$, $p = n + r$, logo $p = (m + k) + r = m + (k + r)$, portanto $m < p$.

Outra importante propriedade de relação de ordem é que, dados dois números naturais diferentes m, n, ou se tem $m < n$ ou então $n < m$. Esta propriedade pode ser reformulada de outra maneira, como segue.

Diremos que os números naturais m, n são *comparáveis* quando se tem $m = n$, $m < n$ ou $n < m$. Podemos então enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2. (*Comparabilidade.*) *Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m.*

Demonstração: Isto se prova por indução. O número 1 é comparável com qualquer outro número natural pois já sabemos que $1 < m$ para todo $m \neq 1$.
Suponhamos agora que o número n seja comparável com todos os números naturais. Mostremos, a partir daí, que $n + 1$ também tem essa propriedade. Com efeito, seja $m \in \mathbb{N}$ tomado arbitrariamente. Sabemos que se tem $m < n$, $m = n$ ou $n < m$. Examinemos cada uma dessas possibilidades:
Se for $m < n$ então $m < n + 1$ por transitividade, pois sabemos que $n < n + 1$.
Se for $m = n$, então $m < n + 1$.
Se for $n < m$ então $m = n + p$. Neste caso, há duas possibilidades. Ou se tem $p = 1$, donde $m = n + 1$, ou então $p > 1$, logo $p = 1 + p'$, e daí $m = (n + 1) + p'$ e concluímos que $n + 1 < m$. Em qualquer hipótese, vemos que $n + 1$ é comparável com qualquer número natural m. Por indução, fica provada a comparabilidade de quaisquer números naturais m, n.
A comparabilidade dos números naturais é complementada pela proposição abaixo.

Teorema 3. (*Tricotomia.*) *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, qualquer das afirmações $m < n$, $m = n$, $n < m$ exclui as outras duas.*

Demonstração: Se tivéssemos $m < n$ e $m = n$, então seria $m = m + p$, donde $m + 1 = m + p + 1$ e, cortando m, concluiríamos que $1 = p + 1$, um absurdo, pois 1 não é sucessor de p. Portanto $m < n$ (e analogamente, $n < m$) é incompatível com $m = n$.
Do mesmo modo, se tivéssemos $m < n$ e $n < m$, então teríamos $n = m + p$ e $m = n + k$, do que resultaria $n = n + k + p$, logo $n + 1 = n + k + p + 1$ e, cortando n, concluiríamos que $1 = k + p + 1$, um absurdo.
O teorema seguinte mostra que n e $n + 1$ são números consecutivos.

Teorema 4. *Não existem números naturais entre n e $n + 1$.*

Demonstração: Se fosse possível ter $n < p < n + 1$, teríamos $p = n + k$ e $n + 1 = p + r$, logo $n + 1 = n + k + r$. Cortando n, obteríamos $1 = k + r$. Por definição, isto significaria $k < 1$, o que é absurdo, pois já vimos que $k \neq 1 \Rightarrow k > 1$.
A conexão entre a relação de ordem e as operações de adição e multiplicação é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 5. (*Monotonicidade.*) *Se $m < n$, então $m + p < n + p$* e *$mp < np$.*
Demonstração: Usando a definição de <, temos que $m < n \Rightarrow n = m + k \Rightarrow n + p = (m + k) + p \Rightarrow m + p < n + p$. Analogamente, $m < n \Rightarrow n = m + k \Rightarrow np = mp + kp \Rightarrow np > mp$.
A recíproca da monotonicidade é a Lei do Corte para desigualdades: $m + p < n + p \Rightarrow m < n$ e $mp < np \Rightarrow m < n$. O leitor poderá prová-la por absurdo, usando a tricotomia e a própria monotonicidade.

6. BOA ORDENAÇÃO

Dado o subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, diz-se que o número natural a é o *menor* (ou *primeiro*) elemento de a quando $a \in A$ e, além disso, $a \leq x$, para todos os elementos $x \in A$.

Por exemplo, 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$.

De agora em diante, dado $n \in \mathbb{N}$, indicaremos com I_n o conjunto dos números naturais p tais que $1 \leq p \leq n$. Assim, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ etc.

As propriedades da relação de ordem $m < n$, demonstradas na seção anterior para os números naturais (exceto o Teorema 4 que vale apenas para números inteiros), são igualmente válidas para os números inteiros, racionais e, mais geralmente, para números reais quaisquer. Existe, porém, uma propriedade de suma importância que é válida para a ordem entre os números naturais, mas sem equivalente para números inteiros, racionais ou reais.

Teorema 6. (Princípio da Boa Ordenação.) *Todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*
Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos admitir que $1 \notin A$, pois caso contrário 1 seria evidentemente o menor elemento de A. O menor elemento de A, cuja existência queremos provar, deverá ser da forma $n + 1$. Devemos pois encontrar um número natural n tal que $n + 1 \in A$ e, além disso, todos os elementos de A são maiores do que n, logo maiores do que $1, 2, \ldots, n$. Noutras palavras, procuramos um número natural n tal que $I_n \subset \mathbb{N} - A$ e $n + 1 \in A$. Com esse objetivo, consideramos o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}.$$

Portanto, X é o conjunto dos números naturais n tais que todos os elementos de A são maiores do que n. Como estamos supondo que $1 \notin A$, sabemos que $1 \in X$. Por outro lado, como A não é vazio, nem todos os números naturais pertencem a X, ou seja, temos $X \neq \mathbb{N}$. Pelo axioma **D**, vemos que o conjunto X não é indutivo, isto é, deve existir algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$ Isto significa que todos os elementos de A são maiores do que n mas nem todos são maiores do que $n + 1$. Como não há números naturais entre n e $n + 1$, concluímos que $n + 1$ pertence a A e é o menor elemento de A.

O Princípio da Boa Ordenação pode muitas vezes ser usado em demonstrações, substituindo o Princípio da Indução. Vejamos um exemplo.

Dissemos anteriormente que um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se indutivo quando $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$, ou seja, quando X contém o sucessor de cada um dos seus elementos. O Princípio da Indução afirma que se um conjunto indutivo X contém o número 1 então X contém todos os números naturais.

Vamos usar o Princípio da Boa Ordenação para provar que se um conjunto indutivo X contém o número a, então X contém todos os números naturais maiores do que a.

A prova desta afirmação se faz por absurdo, como ocorre em geral quando se usa a boa ordenação. Suponhamos então que existam números naturais, maiores do que a, não pertencentes ao conjunto indutivo X. Seja b o menor desses números. Como $b > a$, podemos escrever $b = c + 1$, onde, pela definição de b, tem-se necessariamente $c \in X$. Mas, como X é indutivo, isto obriga que $b = c + 1 \in X$, uma contradição.

A proposição qua acabamos de demonstrar pode ser enunciada da seguinte forma:

Teorema 7: (Princípio da Indução Generalizado.) *Seja P uma propriedade referente a números naturais, cumprindo as seguintes condições:*

(1) O número natural a goza da propriedade P;

(2) Se um número natural n goza da propriedade P então seu sucessor $n + 1$ *também goza de P.*

Então todos os números naturais maiores do que ou iguais a a gozam da propriedade P.

Exemplo 2. Vejamos uma situação simples onde se emprega o Princípio da Indução Generalizado. Trata-se de provar que $2n + 1 < 2^n$, para todo $n \geq 3$. Esta afirmação, (que é falsa para $n = 1$ ou $n = 2$), vale quando $n = 3$. Supondo-a válida para um certo $n \geq 3$, mostremos que daí decorre sua validez para $n + 1$. Com efeito, $2(n + 1) + 1 = (2n + 1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. (Na primeira desigualdade, usamos a hipótese de indução.)

Exemplo 3. Usando a desigualdade $2n + 1 < 2^n$, qua acabamos de provar para $n \geq 3$, podemos demonstrar que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$, empregando novamente o Princípio da Indução Generalizado. Com efeito, vale $5^2 < 2^5$ pois $25 < 32$. Supondo válida a desigualdade $n^2 < 2^n$ para um certo valor de n
≥ 5, daí segue-se que $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1$ (pela hipótese de indução) $< 2^n + 2^n$ (pelo exemplo anterior) $= 2^{n+1}$. Portanto $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Pelo Princípio de Indução Generalizado, segue-se que $P(n)$ vale para todo
$n \geq 5$. Evidentemente, a desigualdade $n^2 < 2^n$ é falsa para $n = 1, 2, 3, 4$.
O teorema abaixo contém outra aplicação do Princípio da Boa Ordenação.

Teorema 8. *Toda função monótona não-crescente* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é constante a partir de um certo ponto. (Isto é, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $f(n) = f(n_0)$*, para todo* $n \geq n_0$.)

Demonstração: Seja n_0 o menor elemento do conjunto $X = \{f(1), f(2), \ldots, f(n),\ldots\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow f(n) \leq f(n_0)$ (porque a função f é não-crescente) o que acarreta que $f(n) = f(n_0)$ (porque $f(n_0)$ é o menor elemento de X).

Corolário: *Toda seqüência decrescente* $n_1 > n_2 > \ldots$ *de números naturais é finita. Com efeito, do contrário, pondo* $f(k) = n_k$*, obteríamos uma função estritamente decrescente* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

7. SEGUNDO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n e sim para todos os números naturais menores do que ou iguais a n. A justificativa de um raciocínio desse tipo se encontra no

Teorema 9: (*Segundo Princípio da Indução.*) *Seja* $X \subset \mathbb{N}$ *um conjunto com a seguinte propriedade:*

(I) Dado $n \in \mathbb{N}$*, se todos os números naturais menores do que n pertencem a X, então n* $\in$ X.

O segundo Princípio da Indução afirma que um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ *com a propriedade (I) coincide com* $\mathbb{N}$.

Demonstração: Com efeito, supondo, por absurdo, que $X \neq \mathbb{N}$, isto é, que $\mathbb{N} - X \neq \varnothing$, seja n o menor elemento do conjunto $\mathbb{N} - X$, ou seja, o menor número natural que não pertence a X. Isto quer dizer que todos os números naturais menores do que n pertencem a X. Mas então, pela propriedade (I), n pertence a X, uma contradição. Segue-se que $\mathbb{N} - X = \varnothing$ e $X = \mathbb{N}$.

Obs. : Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ goza da propriedade (I), para que um número natural n não pertencesse a X seria necessário que existisse algum número natural $r < n$ tal que $r \notin X$. Em particular, se $n = 1$, como não existe número natural menor do que 1, a hipótese $1 \notin X$ não pode ser cumprida. Noutras palavras, (I) já contém implicitamente a afirmação de que $1 \in X$. Assim, ao utilizar o Segundo Princípio da Indução, não é preciso estipular que X contém o número 1.

Toda propriedade P que se refira a números naturais define um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$, a saber, o conjunto dos números naturais que gozam da propriedade P. (E reciprocamente, todo conjunto $X \subset \mathbb{N}$ define uma propriedade referente a números naturais, a saber, a propriedade de pertencer a X.) Deste modo, "propriedade" e "conjunto" são noções equivalentes. Por isso, é natural que o Segundo Princípio da Indução possua a formulação seguinte, onde ele aparece como o

Teorema 10: (Segundo método de demonstração por indução.) *Seja P uma propriedade referente a números naturais. Dado $n \in \mathbb{N}$, se a validade de P para todo número natural menor do que n implicar que P é verdadeira para n, então P é verdadeira para todos os números naturais.*

Demonstração: Com efeito, nas condições do enunciado, o conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P satisfaz a condição (I) do Segundo Princípio da Indução, logo $X = \mathbb{N}$ e P vale para todos os números naturais.

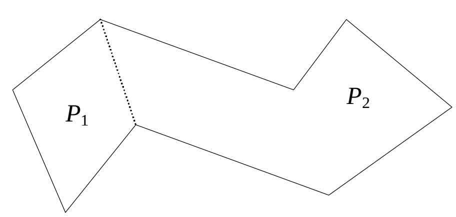
Aplicaremos agora o Segundo Princípio da Indução para demonstrar um fato geométrico. No exemplo a seguir, usamos os números naturais como instrumento de contagem, isto é, como números cardinais, pois empregamos expressões do tipo um polígono de n lados". (Vide seção 6.)

Sabe-se que, traçando diagonais internas que não se cortam, pode-se decompor qualquer polígono em triângulos justapostos. Isto é evidente quando o polígono é convexo: basta fixar um vértice e traçar as diagonais a partir dele. Se o polígono não é convexo, a prova requer mais cuidados. (Vide "Meu Professor de Matemática", pag. 109.)

O leitor pode experimentar com um polígono não-convexo e verificar qua há muitas maneiras diferentes de decompô-lo em triângulos justapostos mediante diagonais internas. Mas vale o resultado seguinte, no qual usaremos o Segundo Princípio da Indução.

Exemplo 4. Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P, de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre $n - 3$.

Com efeito, dado n, suponhamos que a proposição acima seja verdadeira para todo polígono com menos de n lados. Seja então dada uma decomposição do polígono P, de n lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1, de n_1 lados, e P_2, de n_2 lados, onde $n_1 < n$ e $n_2 < n$, logo a proposição vale para os polígonos P_1 e P_2. Evidentemente, $n_1 + n_2 = n + 2$.



As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam assim: $n_1 - 3$ delas decompõem P_1, $n_2 - 3$ decompõem P_2 e uma foi usada para separar P_1 de P_2. Portanto $d = n_1 - 3 + n_2 - 3 + 1 = n_1 + n_2 - 5$. Como $n_1 + n_2 = n + 2$, resulta que $d = n - 3$. Isto completa a demonstração.

Observações:

1. Para habituar-se com o método de demonstração por indução é preciso praticá-lo muitas vezes, a fim de perder aquela vaga sensação de desonestidade que o principiante tem quando admite que o fato a ser provado é verdadeiro para n, antes de demonstrá-lo para $n + 1$.

2. Pratique também (com moderação) o exercício de descobrir o erro em paradoxos que resultam do uso inadequado do método de indução. Vejamos dois desses sofismas:

Exemplo 5. *Todo número natural é pequeno.*

Ora, 1 certamente é pequeno. E se n é pequeno, $n + 1$ não vai subitamente tornar-se grande, logo também é pequeno. (O erro aqui consiste em que a noção "número pequeno" não é bem definida.)

Exemplo 6. *Toda função $f : X \to Y$, cujo domínio é um conjunto finito X*, é constante.

Isto é obviamente verdadeiro se X tem apenas 1 elemento. Supondo a afirmação verdadeira para todos os conjuntos com n elementos, seja $f : X \to Y$ definida num conjunto X com $n + 1$ elementos. Considere um elemento $a \in X$. Como $X' = X - \{a\}$ tem n elementos, f assume o mesmo valor $c \in Y$ em todos os elementos de X'. Agora troque a por um outro elemento $b \in X'$. Obtém-se $X'' = X - \{b\}$ um conjunto com n elementos (entre os quais a). Novamente pela hipótese de indução, f é constante e igual a c em X''. Logo $f(a) = c$ e daí $f : X \to Y$ é constante. (Aqui o erro reside no uso inadequado da hipótese de indução. O raciocínio empregado supõe implicitamente que X tem pelo menos 3 elementos. Na realidade, não vale a implicação $P(1) \Rightarrow P(2)$.)

O perigo de fazer generalizações apressadas relativamente a asserções sobre números naturais fica evidenciado com o seguinte exemplo:

Exemplo 7. Considere o polinômio $p(n) = n^2 - n + 41$ e a afirmação "o valor de $p(n)$ é sempre um primo para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$". Embora isso seja verdadeiro para $n = 0, 1, 2, \ldots, 40$, temos $p(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo, logo a afirmação não é verdadeira.

Semelhantemente, a expressão $q(n) = n^2 - 79n + 1601$ fornece primos para $n = 1, 2, \ldots, 79$, mas $q(80) = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681$ não é primo, pois é divisível por 41. A moral da história é: Só aceite que uma afirmação sobre os números naturais é realmente verdadeira para todos os naturais se isso houver de fato sido demonstrado!

8. NÚMEROS CARDINAIS

Vamos agora mostrar como se usam os números naturais para contar os elementos de um conjunto finito. O Princípio da Indução será essencial. Lembremos que, dado $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$, portanto
$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Uma *contagem* dos elementos de um conjunto não-vazio X é uma bijeção
$f : I_n \to X$. Podemos pôr $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n)$ e escrever
$X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Diz-se então que X possui n elementos. O conjunto X chama-se um *conjunto finito* quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X possui n elementos.

Um exemplo óbvio de conjunto finito é I_n. Evidentemente, a função identidade $f: I_n \to I_n$ é uma contagem dos elementos de I_n.

Um exemplo de conjunto infinito é o proprio conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, pois nenhuma função $f : I_n \to \mathbb{N}$ pode ser sobrejetiva, não importa qual n se tome. De fato, dada f, tomamos $k = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ e vemos que $k > f(x)$ para todo $x \in I_n$, logo $k \notin f(I_n)$, e f não é sobrejetiva.

A fim de que não haja ambigüidade quando se falar do número de elementos de um conjunto finito X, é necessário provar que todas as contagens de X fornecem o mesmo resultado. Noutras palavras, dado o conjunto X, os números naturais m, n e as bijeções $f : I_m \to X$, $g : I_n \to X$, devemos mostrar que se tem $m = n$. Começamos observando que se f e g são bijeções, então $\phi = g^{-1} \circ f : I_m \to I_n$ também é uma bijeção. Basta portanto provar o seguinte:

Teorema 11. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $\phi : I_m \to I_n$ é uma bijeção, então $m = n$.*
Demonstração. Com efeito, chamemos de X o conjunto dos números naturais n que têm a seguinte propriedade: só existe uma bijeção $\phi : I_m \to I_n$ quando $m = n$. Evidentemente, $1 \in X$. Suponhamos agora que $n \in X$. Dada uma bijeção $\phi: I_{m+1} \to I_{n+1}$, duas coisas podem acontecer. Primeira: $\phi(m + 1) = n + 1$. Neste caso, a restrição $\phi|I_m : I_m \to I_n$ é uma bijeção, logo $m = n$, donde $m + 1 = n + 1$. Segunda: $\phi(m + 1) = b$, com $b < n + 1$. Neste caso, consideramos
$a = \phi^{-1}(n + 1)$ e definimos uma nova bijeção $\psi : I_{m+1} \to I_{n+1}$, pondo $\psi(m + 1) = n + 1$, $\psi(a) = b$ e $\psi(x) = \phi(x)$ para os demais elementos $x \in I_{m+1}$. Então recaímos no caso anterior e novamente concluímos que $m + 1 = n + 1$. Isto mostra que $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$, logo $X = \mathbb{N}$ e a unicidade do número cardinal de um conjunto finito fica demonstrada.

Agora os números naturais não são apenas elementos do conjunto-padrão $\mathbb{N}$, mas servem também para responder perguntas do tipo "quantos elementos tem o conjunto X?,"ou seja, podem ser usados também como números cardinais.

A adição de números naturais se relaciona com a cardinalidade dos conjuntos por meio da seguinte proposição.

Teorema 12: *Sejam X, Y conjuntos finitos disjuntos. Se X tem m elementos e Y tem n elementos, então $X \cup Y$ tem $m + n$ elementos.*
Demonstração: Com efeito, se $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to Y$ são bijeções, definimos uma bijeção $h : I_{m+n} \to X \cup Y$ por $h(x) = f(x)$ se $1 \le x \le m$ e
$h(x) = g(x) + m$ se $m + 1 \le x \le m + n$, o que conclui a demonstração.
Prova-se, por indução, que todo subconjunto de um conjunto finito X é também finito e seu número de elementos é menor do que ou igual ao de X (Veja E.L.Lima, "Análise Real", vol 1, pag. 5.)

E conveniente incluir, por definição, o conjunto vazio entre os conjuntos finitos e dizer que o seu número de elementos é *zero*. Embora zero não seja um número natural, ele passa a ser o número cardinal do conjunto vazio.

Seguem-se algumas proposições que devem ser demonstradas por indução ou boa ordenação. Os dez últimos exercícios foram sugeridos pelo Professor A. C. Morgado.

Exercícios:

1. Construa um esquema de setas começando com os números ímpares, seguidos dos números pares divisíveis por 4 em ordem decrescente e, por fim, os pares não divisíveis por 4 em ordem crescente. Noutras palavras, tome $X = \mathbb{N}$ e defina $s : X \to X$ pondo $s(n) = n + 2$ se n não é divisível por 4, $s(n) = n - 2$ se n for múltiplo de 4. Mostre que $s : X \to X$ cumpre os axiomas **A**, **B**, **C** mas não **D**.
2. Defina, por recorrência, uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estipulando que $f(1) = 3$ e $f(n + 1) = 5.f(n) + 1$. Dê uma formula explícita para $f(n)$.

3. Dê uma fórmula explícita para $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sabendo que $f(1) = 1$, $f(2) = 5$ e $f(n + 2) = 3f(n + 1) - 2f(n)$.
4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto indutivo não-vazio. Mostre que existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $X = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq a\}$.
5. Prove, por indução, que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
6. Num polígono com $n \geq 6$ lados, o número de diagonais é maior do que n.
7. Prove, por indução que $[(n + 1)/n]^n < n$, para todo $n \geq 3$. (Sugestão: Observe que $(n + 2)/(n + 1) < (n + 1)/n$ e eleve ambos os membros desta desigualdade à potência $n + 1$.) Conclua daí que a seqüência $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, ...$ é decrescente a partir do terceiro termo.
8. Prove, por indução a desigualdade de Bernoulli: $(1 + a)^n > 1 + na$ quando $1 + a > 0$.
9. Para todo $n \in \mathbb{N}$, ponha $x_n = \left[\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^n$ e prove, por indução que se tem $x_n < \dfrac{n+2}{n+1}$. Conclua, a partir daí, que a seqüência de termo geral $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ é crescente.

   Sugestão: observe que $x_{n+1} = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^3 \cdot \dfrac{n}{n+3} \cdot x_n$.

10. Use a distributividade de duas maneiras diferentes para calcular $(m + n)(1 + 1)$ e aplique em seguida a Lei do Corte para obter uma nova prova de que $m + n = n + m$.

11. Um conjunto $S \subset \mathbb{N}$, não-vazio, é limitado superiormente, se existe um natural k tal que para todo natural $x \in S$, então $x \leq k$. Mostre que S possui um maior elemento. (Isto é, existe $m \in S$ tal que $x \leq m$, para todo $x \in S$.)

12. Demonstre que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2, ou seja, que $1 + 3 + 5 + … + (2n - 1) = n^2$.

13. Prove que $2^n - 1$ é múltiplo de 3, para todo número natural n par.

14. Demonstre que, para todo número natural n, vale
$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq n+1.$$

15. Demonstre que $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + .. + \dfrac{1}{199} - \dfrac{1}{200} = \dfrac{1}{101} + \dfrac{1}{102} + ... + \dfrac{1}{200}$.

16. Determine A^n se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

17. Demonstre, usando o Princípio da Indução Finita, que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + ... + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p}$.
    Este resultado é comumente conhecido por *Teorema das Colunas*. (Por quê?).
18. Considere a seqüência $\dfrac{1}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{5}, ..., \dfrac{p_n}{q_n}, ...$, onde

    $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ e $q_{n+1} = p_n + q_n$. Demonstre que

a) m.d.c $(p_n, q_n) = 1$;

b) p_n é o inteiro mais próximo de $\dfrac{(1+\sqrt{2})^n}{2}$ e q_n é o inteiro mais próximo de $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n$.

19. [A Torre de Hanói.] São dados três suportes A, B e C. No suporte A estão encaixados n discos cujos diâmetros, de baixo para cima, estão em ordem estritamente decrescente. Mostre que é possível, com $2^n - 1$ movimentos, transferir todos os discos para o suporte B, usando o suporte C como auxiliar, de modo que jamais, durante a operação, um disco maior fique sobre um disco menor.

20. Demonstre que $2^n < n!$, para $n \geq 4$.

21. Demonstre que $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$ para $n \geq 3$.

22. Considere n retas em um plano. Mostre que o "mapa" determinado por elas pode ser colorido com apenas duas cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor.